Université Abdelmalak Essaâdi
Faculté des Sciences et Techniques
Tanger

Département de Mathématiques
Deuxième semestre
Année 2008/2009

TD N°6 : Analyse I
MIPC-GEGM

Exercice 1:

Calculer les intégrales généralisées suivante :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$; b) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx$

c) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(x+r)}dx$ $(a>0; r>0)$; d) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$

Exercice 2 :

1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \tan(x)\,dx$ diverge

a) Par un calcul de primitive.

b) Par le critère de Riemann.

Exercice 3 :

Etudier en fonction du paramètre réel α la convergence des intégrales suivantes :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^{\alpha}}$; b) $\int_0^{1} \frac{\cos^{\alpha}(\pi t/2)}{\sqrt{t(1-t)}}dt$

Exercice 4 :

3) Montrer que les intégrales suivantes sont semi-convergentes :

a) $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$; b) $\int_{\pi}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$

Exercice 5 :

1) Soit :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}dt$$

a) Montrer que l'intégrale I converge.

b) Pour $\varepsilon > 0$, établir la relation :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}dt$$

c) En déduire la valeur de I.



Exercice 6:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
2. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
3. $y' + y = x e^{-x}$

Exercice 7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$; sur $]-1, +\infty[$
3. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$

Exercice 8 :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$
2. $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x + e^{3x}$
3. $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + x e^{2x} \cos(x)$

TD N°6 Analyse 1

Exercice 1

a/ $\int_0^A \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int_0^A (\text{Arctan} x)' \text{Arctan} x \, dx = \left[\frac{\text{Arctan}^2 x}{2}\right]_0^A = \frac{\text{Arctan}^2 A}{2}$

$\lim_{A\to+\infty} \text{Arctan}^2 A = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ converge vers $\frac{\pi^2}{8}$

b/ $\int_1^A \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{1+x}\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{x(x+1)}\,dx$ $\quad \begin{cases} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{(1+x)^2} & v = -\frac{1}{1+x} \end{cases}$

$= -\frac{\ln A}{1+A} + \int_1^A \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = -\frac{\ln A}{1+A} + \left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^A$

$= -\frac{\ln A}{1+A} + \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) + \ln 2$

$\lim_{+\infty} \frac{\ln A}{1+A} = 0$ et $\lim_{+\infty} \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) = 0$ d'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx$ converge vers $\ln 2$

c/ $\int_a^A \frac{1}{x(x+r)}\,dx = \frac{1}{r}\int_a^A \frac{1}{x} - \frac{1}{x+r}\,dx = \frac{1}{r}\left[\ln x - \ln(x+r)\right]_a^A$

$= \frac{1}{r}\left[(\ln A - \ln(A+r)) - (\ln(a) - \ln(a+r))\right] = \frac{1}{r}\left(\ln\frac{A}{A+r} - \ln\frac{a}{a+r}\right)$

$\lim_{A\to+\infty} \ln\frac{A}{A+r} = 0$ d'où $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(x+r)}\,dx = \frac{1}{r}\ln\frac{a+r}{a}$

d/ Posons $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$

- $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$
- Posons $\begin{cases} u = x^n & u' = n x^{n-1} \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{cases}$ pour $n \geq 1$

$I_n = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -n \cdot x^{n-1} e^{-x}\,dx \Rightarrow I_n = n \cdot I_{n-1}$

en effet $\lim_{n\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{+\infty} \left(x e^{-\frac{x}{n}}\right)^n = \lim_{+\infty} \left(-\left(-\frac{x}{n} e^{-\frac{x}{n}}\right) \cdot n\right)^n = 0$

On a
$$\left.\begin{aligned} I_n &= n \cdot I_{n-1} \\ I_{n-1} &= (n-1)\, I_{n-2} \\ I_{n-2} &= (n-2)\, I_{n-3} \\ &\vdots \\ I_3 &= 3 \cdot I_2 \\ I_2 &= 2 \cdot I_1 \\ I_1 &= 1 \cdot I_0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{produit}} I_n = n(n-1)(n-2)\cdots\times 3\times 2\times I_0$$

$$\Rightarrow I_n = n!$$

<u>Exercice 2</u> a/ $\int_0^A \tan x\, dx = \int_0^A \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int_0^A -\frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx =$

On $\lim_{A\to} |\cos| = 0^+$ d'où $\lim -\ln|\cos A| = +\infty$ donc $\int_0^{\pi/2} \tan x\, dx$ diverge vers $+\infty$

<u>Exercice 3</u> a/ $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \int_1^2 \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} + \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$

$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^2 \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \int_\varepsilon^2 (\ln t)'(\ln t)^{-\alpha} dt = \left[\frac{(\ln t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^2 = \frac{1}{1-\alpha}\left((\ln 2)^{1-\alpha} - (\ln \varepsilon)^{1-\alpha}\right)$

De même $I_A = \int_2^A \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left((\ln A)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}\right)$

<u>1° cas</u> si $\alpha > 1$ alors $1-\alpha < 0$ et $\lim_{+\infty} (\ln A)^{1-\alpha} = 0$; $\lim_{\varepsilon \to 1^+} (\ln \varepsilon)^{1-\alpha} = +$

donc I_A c.v et I_ε div donc I diverge

<u>2° cas</u> si $\alpha < 1$ alors $1-\alpha > 0$ et $\lim_{+\infty} (\ln A)^{1-\alpha} = +\infty$, $\lim_{\varepsilon \to 1^+} (\ln \varepsilon)^{1-\alpha} =$

donc I_A div et I_ε c.v donc I diverge

<u>3° cas</u> si $\alpha = 1$ alors I

b/ • Au voisinage de 0 : $f(t) = \frac{\cos^\alpha(\frac{\pi}{2}t)}{\sqrt{t(1-t)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}$

$\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1/2}} dt$ c.v pour $\alpha = 1/2 < 0$ donc $\int_0^{1/2} f(t)\, dt$ converge

• Au voisinage de 1 : Posons $T = 1 - t$ alors :

$\int_{1/2}^1 \frac{\cos^\alpha(\frac{\pi}{2}t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt = -\int_{1/2}^0 \frac{\cos^\alpha(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}T)}{\sqrt{T(1-T)}} dT = \int_0^{1/2} \frac{\sin^\alpha(\frac{\pi}{2}T)}{\sqrt{(1-T)T}} dT$

Exercice 5 $\quad I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$

a/ • Au voisinage de 0 : $\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-e^{-t}+2e^{-2t}}{1} = 1$ (Règle l'Hôpital)

donc $f(t) = \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$ est prolongeable par continuité au point 0

d'où f est intégrable sur $[0,1]$

• Au voisinage de $+\infty$: $\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} = \frac{e^{-t}(1-e^{-t})}{t} \sim \frac{e^{-t}}{t}$

$\int_1^A \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt = -\frac{e^{-A}}{A} + e^{-1} - \int_1^A \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt$

$\begin{cases} u = \frac{1}{t} & u' = -\frac{1}{t^2} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{cases}$

$\lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-A}}{A} = \lim_{+\infty} \frac{1}{Ae^{A}} = 0$; $\int_1^A \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt \le \int_1^A \frac{1}{t^2}\, dt$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ C.V donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt$ C.V $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$. C.V

d'où la converge de I

b/ $\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-2t}}{t}\, dt$

Posons $u = 2t$ alors $\int_\varepsilon^A \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_{2\varepsilon}^{2A} \frac{e^{-u}}{\frac{u}{2}} \frac{du}{2} = \int_{2\varepsilon}^{2A} \frac{e^{-u}}{u}\, du$

d'où $\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{2\varepsilon}^{2A} \frac{e^{-u}}{u}\, du$

$= \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{2\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_A^{2A} \frac{e^{-t}}{t} = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_A^{2A} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$

On a $\int_A^{2A} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \le \frac{1}{A}\int_A^{2A} e^{-t}\, dt = -\frac{1}{A}\left[e^{-2A} - e^{-A}\right]$ $\quad \left(A \le t \le 2A \Rightarrow \frac{1}{2A} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{A}\right)$

Par passage à la limite en $+\infty$: $\frac{e^{-2A}}{A} \to 0$ et $\frac{e^{-A}}{A} \to 0$ d'où le résultat

c/ On a : $\varepsilon \le t \le 2\varepsilon \Rightarrow e^{-2\varepsilon} \le e^{-t} \le e^{-\varepsilon} \Rightarrow \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-2\varepsilon}}{t}\, dt \le \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \le \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{t}\, dt$

$\Rightarrow e^{-2\varepsilon}[\ln t]_\varepsilon^{2\varepsilon} \le I_\varepsilon \le e^{-\varepsilon}[\ln t]_\varepsilon^{2\varepsilon} \Rightarrow e^{-2\varepsilon}\ln 2 \le I_\varepsilon \le e^{-\varepsilon}\ln 2 \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \ln 2$ donc $I = \ln 2$

Au voisinage de $T=0$: $\dfrac{\sin^\alpha(\frac{\pi}{2}T)}{\sqrt{(1-T)T}} \sim \dfrac{(\frac{\pi}{2}T)^\alpha}{\sqrt{T}} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^\alpha \cdot \dfrac{1}{T^{1/2-\alpha}}$

$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{T^{1/2-\alpha}}\, dT$ c.v $\Leftrightarrow \frac{1}{2}-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}$

Alors pour $\alpha > -1/2$: $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)\, dt$ c.v et par suite $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ c.v

Exercice 4 a/ * Posons $\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \\ v' = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\int_\pi^A \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_\pi^A + \frac{1}{2}\int_\pi^A \frac{\sin x}{x^{3/2}}\, dx = \frac{\sin A}{\sqrt{A}} + \frac{1}{2}\int_\pi^A \frac{\sin x}{x^{3/2}}\, dx$$

- On a $\left|\dfrac{\sin A}{\sqrt{A}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{A}} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sin A}{\sqrt{A}} = 0$

- $\displaystyle\int_\pi^A \left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right| dx \le \int_\pi^A \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$ c.v ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) donc $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\, dx$

est absolument c.v donc convergente d'où la convergence de $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$

* $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}\, dx$

On pose $t = x - k\pi$ alors $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^\pi \frac{|\cos(t+k\pi)|}{\sqrt{t+k\pi}}\, dt = \int_0^\pi \frac{|\cos t|}{\sqrt{t+k\pi}}$

Or $0 \le t \le \pi \Rightarrow k\pi \le t + k\pi \le \pi + k\pi \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{t+k\pi}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}$

de plus $\displaystyle\int_0^\pi |\cos t|\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos t\, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} - [\sin t]_{\pi/2}^{\pi} = 2$

d'où $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}\, dx \geqslant \int_0^\pi \frac{|\cos t|}{\sqrt{(k+1)\pi}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{(k+1)\pi}}$

et par suite $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}\, dx \ge \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{(k+1)\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$

(Cours Analyse 2 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ diverge donc $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}\, dx$ diverge)

b/ On pose $u = x^2$ alors $du = 2x\, dx$ d'où $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos x^2\, dx = \int_{\pi^2}^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}$

Meme chose que l'exemple a/


ETUSUP.com